ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ell n(e^{x} + 1), \quad x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{x}\left(h(x) + \ell n 2\right), \quad x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{x} - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_{1}^{2f'(x)} f(u)\, du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x = 0$ (μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x\ge x_0$ με $x=x(t),\ y=y(t),\ t\ge 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\ge 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2\left(x-2\right)^2,\quad x\in\left(0,+\infty\right)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο σελίδα 151

Α2 — — — 173

Α3 — — — 258-259.

Α4. $\alpha \to Λ$ $\beta \to Σ$ $\gamma \to Σ$ $\delta \to Σ$ $\epsilon \to Λ$

ΘΕΜΑ Β

Β1 Έστω $z = x+yi$ τότε η εξίσωση γίνεται

$$2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2)-4+(x-1)2i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)-4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \text{ ή } y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Άρα $z = 1+i$ ή $z = 1-i$

Β2. Έχουμε $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$

Είναι $w = 3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3i^{39} = 3\cdot i^{36+3} = 3(i^4)^9 i^3 = 3i^3 = -3i$

Β3 Είναι $|u+w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u-3i| =$

$= |4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow |u-3i| = |3+4i|$ (1)

Έστω $u = x+yi$ τότε η (1) γίνεται

$|x+yi-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow |x+(y-3)i| = |3+4i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 = 25 \Rightarrow x^2+(y-3)^2 = 5^2$ Άρα ο

ζητούμενος Γ.Τ είναι κύκλος κέντρου

$K(0,3)$ και ακτίνας $\rho = 5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln(e^x+1)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ως σύνθεση των $\ln x$ και e^x+1. Άρα η $h(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

· Έχουμε $h'(x)=\left(x-\ln(e^x+1)\right)'=\dots=\frac{1}{e^x+1}$

κι επειδή $h'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, η h είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

· Είναι $h''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=\dots=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ και

επειδή $h''(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ2 Έχουμε $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow$

$\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h(2h'(x))<\ln e-\ln(e+1)$

$\Leftrightarrow h(2h'(x))<1-\ln(e+1)\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)\overset{h'\searrow}{\Leftrightarrow}x>0$

Γ3 Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln(e^x+1)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln(e^x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}$

Θέτω $u=\frac{e^x}{e^x+1}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{u\to 1} \ln u = 0$

Οπότε $y=0$ ή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

• Έστω (ε): $y=\lambda x+\beta$ πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Τότε $\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)$ (1)

Θέτω $u = e^x+1$ άρα $\lim_{x\to-\infty} u = \lim_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1$

οπότε $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln u}{x} = 0$

οπότε $\lambda = 1$. λόγω της (1)

• $\lim_{x\to-\infty}(h(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty}(h(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\ln(e^x+1)\right)$
$= -\lim_{x\to-\infty}\left(\ln(e^x+1)\right) = 0$ Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. Είναι $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow e^x(h(x)+\ln 2)=0 \Leftrightarrow$
$h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow h(x)=h(0) \overset{h\ 1-1}{\Longleftrightarrow} x=0$

Διαστήματα ολοκλήρωσης $[0,1]$

• $\varphi(x) = e^x\left(x-\ln(e^x+1)+\ln 2\right) = e^x\left(\ln e^x + \ln 2 - \ln(e^x+1)\right) = e^x \ln\frac{2e^x}{e^x+1}$

• $x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow 2e^x \geq e^x + 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{2e^x}{e^x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \ln \dfrac{2e^x}{e^x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0$

στο $[0,1]$

• φ συνεχης στο $[0,1]$ αρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 e^x \ln\left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right| dx = \int_0^1 (e^x)' \ln\left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right| dx =$$

$$= \left[e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \frac{e^x+1}{2e^x}\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)' dx =$$

$$= e \ln\frac{2e}{e+1} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x+1)\frac{2e^x(e^x+1) - 2e^x e^x}{(e^x+1)^2} dx$$

$$= e \ln\frac{2e}{e+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x}}{e^x+1} dx$$

$$= e \ln\frac{2e}{e+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1} dx = e \ln\frac{2e}{e+1} -$$

$$- \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx = e \ln\frac{2e}{e+1} - \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 =$$

$$= e \ln\frac{2e}{e+1} - \left[\ln(e+1) - \ln 2\right] = e \ln\frac{2e}{e+1} - \ln\frac{e+1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ Άρα η f συνεχής στο 0.

Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

Θεωρώ την $h(x) = xe^x - e^x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$

Έχω $h'(x) = xe^x$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

η h έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ άρα $h(x) \geq h(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

άρα $h(x) \geq 0$

οπότε $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$ άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2.

(α) η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$

άρα $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ επειδή

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x-1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(e^x-1)'}{x'} = +\infty$

δηλαδή $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du = 0$

Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$ δηλ. $f'(0)=\frac{1}{2}$

Άρα $\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du=0 \Leftrightarrow \int_1^1 f(u)\,du=0$

επομένως η $x=0$ είναι ρίζα

· Αν $x>0$, επειδή f κυρτή άρα $f'\uparrow$

είναι $f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>\frac{1}{2}\Rightarrow 2f'(x)>1$

$\Leftrightarrow \int_1^{2f'(x)} f(u)\,du>0$ αφού $f(x)>0$

· Αν $x<0$, όμοια έχουμε $f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow$

$\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du<0$

επομένως η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα

β) Στο σημείο που ο ρυθμός μεταβολής του $x(t)$ είναι διπλάσιος του $y(t)$ θα έχουμε

$x'(t)=\left(2f(x(t))\right)'\Leftrightarrow x'(t)=2f'(x(t))\cdot x'(t)\Leftrightarrow$

$f'(x(t))=\frac{1}{2}$ (αφού $x'(t)>0$) άρα

$f'(0)=f'(x(t)) \underset{f'\ 1-1}{\overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow}} x(t)=0$

Άρα το σημείο είναι το $M\left(x(t_0)=0,\ y(t_0)=\right.$

$\left.=f(0)=1\right)$.

Δ3.

Είναι $g(x) = \left(x f(x) + 1 - e\right)^2 (x-2)^2 =$

$= \left(x \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e\right)^2 (x-2)^2 = \left(e^x - e\right)^2 (x-2)^2$

Είναι $g'(x) = 2(e^x - e)e^x (x-2)^2 + (e^x - e)^2 2(x-2)$

$= 2(e^x - e)(x-2)\left(e^x(x-2) + e^x - e\right) =$

$2(e^x - e)(x-2)(xe^x - 2e^x + e^x - e) =$

$= 2(e^x - e)(x-2)(xe^x - e^x - e)$

Θέτω $\varphi(x) = xe^x - e^x - e \quad x \in (0, +\infty)$

τότε $\varphi'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x > 0$

άρα η φ είναι γνήσια αύξουσα

με $\varphi(1) = -e < 0$ και $\varphi(2) = e(e-1) > 0$

- η φ είναι συνεχής στο $[1, 2]$
- Είναι $\varphi(1) \cdot \varphi(2) < 0$

άρα από Θ. Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$ και η φ είναι $\uparrow$

άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Για $x > x_0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0 = \varphi(x_0)$

$x < x_0 \Leftrightarrow \varphi(x) < 0 = \varphi(x_0)$

x	0		1		x_0		2	
$2(e^x - e)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x - 2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$xe^x - e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
g'		$-$		$+$		$-$		$+$
g		$\searrow$	τε	$\nearrow$	τμ	$\searrow$	τε	$\nearrow$

Δυο θέσεις τ. ελαχ. και μια θέση τ. μεγ.