ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0)=\boldsymbol{\eta}$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι $fog = gof$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4|=2|z-1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Μονάδες 7

Β2. Έστω $w=\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4\leq w\leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w=-4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3, με $z_3=2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x}f(t)\,dt<2x\,f(4x)$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x}f(t)\,dt\,, & x>0\\[2mm] 2\,, & x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f(0)=0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. **α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ell n|f(x)|\right].$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^{x} f^2(t)dt}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Μονάδες 7

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 188

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.150

Α4. α) Λ , β) Σ , γ) Λ , δ) Σ , ε) Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Έστω $z=x+yi$ τότε $z-4=(x-4)+yi$ και $z-1=(x-1)+yi$ οπότε η σχέση $|z-4|=2|z-1|$ γίνεται:

$$|(x-4)+yi|=2|(x-1)+yi| \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=4\left((x-1)^2+y^2\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2=4x^2-8x+4+4y^2 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2=12 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$. Άρα ο τόπος των εικόνων των z είναι ο κύκλος $K(0,2)$

Β2. α) $w=\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}$ και από το Β1 έχω $|z|=2$ δηλαδή $|z|^2=4$ άρα

$z\cdot\bar{z}=4 \Rightarrow \bar{z}=\dfrac{4}{z}$ (1), οπότε $\bar{w}=\dfrac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\dfrac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\dfrac{2\cdot\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\dfrac{2\cdot\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\dfrac{2z_2}{z_1}+\dfrac{2z_1}{z_2}=w$.

Δηλαδή $\bar{w}=w$ άρα $w\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $|z_1|=|z_2|=2 \Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|}=1 \quad (1)$.

Έχουμε:

$$w=2\frac{z_1}{z_2}+2\frac{z_2}{z_1} \Rightarrow |w|=\left|2\frac{z_1}{z_2}+2\frac{z_2}{z_1}\right| \le \left|2\frac{z_1}{z_2}\right|+\left|2\frac{z_2}{z_1}\right|=2\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+2\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=2\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\frac{|z_2|}{|z_1|}\overset{(1)}{=}2+2=4$$

Δηλαδή $|w|\le 4 \overset{w\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} -4\le w\le 4$.

Β3. Έχουμε $(\mathrm{A\Gamma})=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1(1-2i)|=|z_1|\cdot|1-2i|=2\sqrt{5}$.

$(\mathrm{B\Gamma})=|z_2-z_3|=|-z_1-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1+2iz_1|=|z_1(1+2i)|=|z_1|\cdot|1+2i|=2\sqrt{5}$.

Άρα $(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{B\Gamma})$ οπότε $\mathrm{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

<u>**ΘΕΜΑ Γ**</u>

Γ1. Έχουμε $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$ δηλαδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Οπότε f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Γ2. Η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 οπότε:

$$f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=f(2)\overset{f\,'1-1'}{\Leftrightarrow} e^{3-x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$, που έχει μοναδική λύση αφού $\frac{e^3}{2}\in f(\mathbb{R})$ και $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Για κάθε x>0 ορίζεται το $[2x,4x]$, για κάθε $t\in[2x,4x]$ ισχύει ότι $t\le 4x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(t)\le f(4x)$ (το ''='' ισχύει για $t=4x$) άρα

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt<\int_{2x}^{4x} f(4x)\,dt\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt<f(4x)\cdot[t]_{2x}^{4x}\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt<f(4x)\cdot 2x.$$

Γ4. Από το Γ3 έχουμε $\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2x\cdot f(4x)$ οπότε $-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt>-\frac{2}{x}f(4x)\ (1)$.

Για την $g(x)$, για x>0 έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right)'=-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right)'\Leftrightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(4f(4x)-2f(2x)\right)=$$

$$=-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt+\frac{2}{x}f(4x)+\frac{2}{x}f(4x)-\frac{2}{x}f(2x)=\frac{2}{x}f(4x)-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt+\frac{2}{x}\left(f(4x)-f(2x)\right)>0$$

διότι από (1) είναι $-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt>-\frac{2}{x}f(4x)$ άρα $\frac{2}{x}f(4x)-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt>0$ και

$\frac{2}{x}\left(f(4x)-f(2x)\right)>0$ αφού x>0 και $f(4x)>f(2x)$ αφού $4x>2x$ και $f\uparrow$.

<u>Άρα</u> $\underline{g'(x)>0}$.

Είναι

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\left(4f(4x) - 2f(2x)\right) =$$

$= \lim_{x\to 0} f(4x) - 2\lim_{x\to 0} f(2x) = 4\cdot f(0) - 2f(0) = 2$ και $g(0) = 2$. Άρα η g συνεχής στο 0. Άρα g γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 2 - f'(x)e^{-f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = (2x)' + \left(e^{-f(x)}\right)' \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = \left(2x + e^{-f(x)}\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = 2x + e^{-f(x)} + c,$$

και $f(0) = 0$ οπότε $e^{f(0)} = 2\cdot 0 + e^{-f(0)} + c \Leftrightarrow c = 0$ οπότε $e^{f(x)} = 2x + e^{-f(x)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{2f(x)} = 2xe^{f(x)} + 1 \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = 1 + x^2\ (1).$$

Έστω $g(x) = e^{f(x)} - x$ οπότε $g^2(x) = \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = 1 + x^2 \neq 0$ άρα $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Οπότε η g, σαν συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $g(0) = e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$ είναι $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε από $(1) \Rightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x)\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Δ2. α) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)' = \ldots = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ η f είναι ↑ στο $\mathbb{R}$. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \ldots = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f''(0)=0 \Leftrightarrow x=0$. $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0 \Leftrightarrow x<0$ και $f''(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>0$. Άρα για την $f''(x)$ έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
	$\smile$	ΣΚ	$\frown$

Η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και παραγωγίσιμη στο 0. Το $(0, f(0))$ είναι Σ.Κ και f $\smile$ σ το $[-\infty,0]$ και f $\frown$ στο $[0,+\infty)$.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της c_f στο $(0, f(0))=(0,0)$. Είναι $f'(0)=1$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-0=1(x-0) \Rightarrow y=x$. Το εμβαδό είναι

$E=\int_0^1 |f(x)-x|dx$ και επειδή η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ είναι $f(x)-x<0$.

Άρα $|f(x)-x|=x-f(x)$ οπότε

$$E=\int_0^1 (x-f(x))dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 (x)'\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Έστω $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ θέτω $u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx$ και $x=0 \to u=1$, $x=1 \to u=2$,

άρα $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2}du=\sqrt{2}-1$.

Άρα $E=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}$.

Δ3. Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ από Δ1 η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα $x>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0\ \ \forall x>0$ άρα $|f(x)|=f(x)$.

$$I=\lim_{x\to o^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln\left(f(x)\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\dfrac{1}{\ln f(x)}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}\right)'}{\left(\dfrac{1}{\ln f(x)}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{-\dfrac{f'(x)}{\ln^2 f(x)\cdot f(x)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f(x)\cdot\frac{\left[f(x)\ln f(x)\right]^2}{f'(x)}\right)$$. Είναι $\lim_{x\to 0^+}\left(-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\right)=-1$, $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{0}{1}=0$

και $\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot \ln f(x)=0$ διότι θέτω $f(x)=u\Rightarrow f(x)\ln f(x)=u\cdot\ln u$

άρα $\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln f(x)=\lim_{u\to 0^+} u\ln(u)=\lim_{u\to 0^+}\dfrac{\ln u}{\dfrac{1}{u}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{u\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{u}}{-\dfrac{1}{u^2}}=\lim_{u\to 0^+}(-u)=0$.

Άρα τελικά $I=0$.

Η δοσμένη γίνεται $(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)=0\ (1)$

για $x\neq 2,3$. Έστω $g(x)=(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)$ με $x\in[2,3]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $g(2)=-\left(8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right)$.
- Η $y=x$ είναι εφαπτομένη της c_f στο (0,0) και η f είναι κοίλη στο $[0,-\infty)$ άρα $f(x)\le x\ \ \forall x\ge 0$ και $f(x)=x$ μόνο για x=0 άρα $f(t)<t\Rightarrow f^2(t)<t^2\Rightarrow\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2dt=\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^2=\dfrac{8}{3}$ και

$-3\int_0^2 f^2(t)\,dt > -8 \Leftrightarrow 8-3\int_0^2 f^2(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow -\left(8-3\int_0^2 f^2(t)\,dt\right) < 0 \Leftrightarrow g(2) < 0$.

- $g(3) = 1-3\int_0^1 f(t^2)\,dt$ και $f(t) < t$ άρα $f(t^2) < t^2 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt < \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ και $-3\int_0^1 f(t^2)\,dt > -1 \Rightarrow 1-3\int_0^1 f(t^2)\,dt > 0 \Leftrightarrow g(3) > 0$. Άρα $g(2)g(3) < 0$, άρα με θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2,3).