# <u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

**18 ΜΑΪΟΥ 2016**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(\alpha, \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$, στο οποίο όμως η $f$ είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο $(\alpha, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f$.

**Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε δύο συναρτήσεις $f, g$ λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν $G$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = G(\alpha) - G(\beta)$.

**β)** Αν οι συναρτήσεις $f, g$ έχουν όριο στο $x_0$ και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

**γ)** Κάθε συνάρτηση $f$, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

**δ)** Μια συνάρτηση $f$ είναι 1–1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο $y$ του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς $x$.

**ε)** Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η $f$ παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή $M$ και μια ελάχιστη τιμή $m$.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

**Β1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της $f$.

**Μονάδες 6**

**Β2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

**Μονάδες 9**

**Β3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f$.

**Μονάδες 7**

**Β4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 3**

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η $f$ είναι κυρτή.

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Αν $f$ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$$

όταν $x \in [0, +\infty)$.

**Μονάδες 9**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f$ ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right) \eta\mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Δ1.** Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (μονάδες 4) και $f'(0) = 1$ (μονάδες 3).

**Μονάδες 7**

**Δ2.** **α)** Να δείξετε ότι η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

**β)** Να δείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\etaμx + \sigmaυνx}{f(x)}$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να δείξετε ότι $0 < \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx < \pi^2$

**Μονάδες 6**

# <u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

**18 ΜΑΪΟΥ 2016**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 262.
**Α2.** Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 141.
**Α3.** Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 246.
**Α4.** α) Λ, β) →Σ , γ) →Λ , δ) Σ, ε) → Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

$$f(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f′ | - | 0 | + |
| f | $\searrow$ | | $\nearrow$ |
| | | Τοπ. Ελάχιστο f(0)=0 | |

Έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f\left(0\right)=0$.

**B2.** $f''(x)=\left(\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\dfrac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\left[(x^2+1)^2\right]}{(x^2+1)^4}=$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)\left[2(x^2+1)-8x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\left(2x^2+2-8x^2\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)(2-6x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)(1-3x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^4}.$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| f(x) | | $\frown$ | | $\smile$ | | $\frown$ | |

$$F(-\frac{\sqrt{3}}{3})=1/4 \qquad F(\frac{\sqrt{3}}{3})=1/4$$

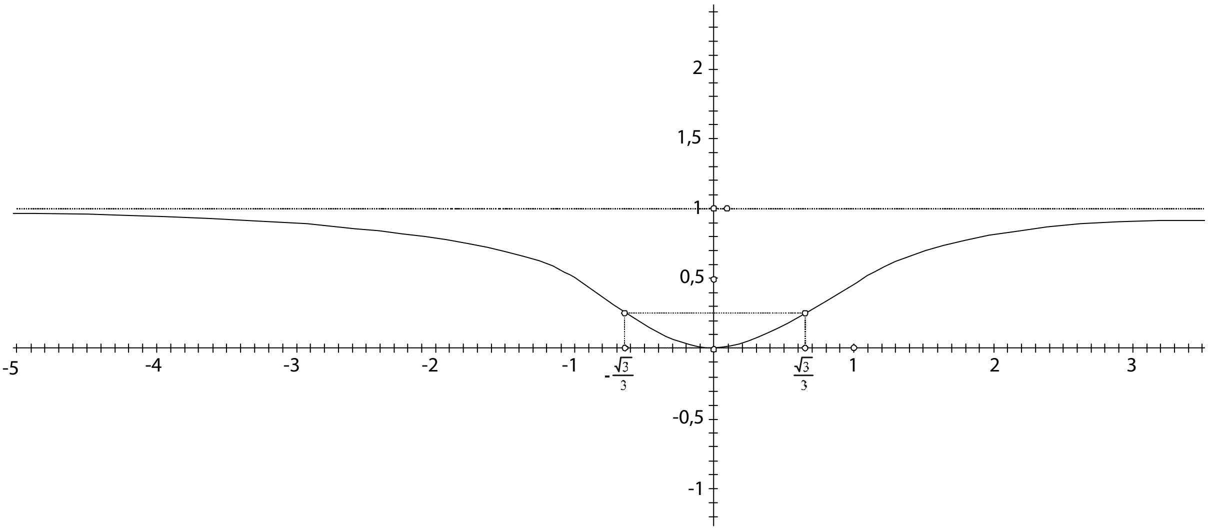
Προκύπτει ότι η $f$ είναι κοίλη στα $(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3}][\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$, είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,

ενώ παρουσιάζει Σ.Κ. στις θέσεις $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**B3** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

**B4**




## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Έστω $K(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$

$K(0) = e^0 - 1 = 0$

$K'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι:

$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0$

Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^{x^2}-1$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $K'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $K(x)$ | | $\searrow$ | min=0 | $\nearrow$ | |

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι $K(x) > 0$, ενώ $K(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

**Γ2** Για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$: $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\neq 0$, λόγω του ερωτήματος Γ1.

Έτσι η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Για $x\in(0,+\infty)$: $\left(f(x)-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\right)\cdot\left(f(x)+\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\right)=0$ (1)

Αν $f(x)>0$, τότε επειδή $e^{x^2}-x^2-1>0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x)-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)=0\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Αν $f(x)<0$, τότε επειδή το $-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)<0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x)+\left(e^{x^2}-x^2-1\right)=0\Leftrightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

- Για $x\in(-\infty,0)$

Αν $f(x)>0$, τότε από την (1) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Αν $f(x)<0$, τότε από την (1) $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$.

Έτσι προκύπτει ότι

α) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή

β) $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$ ή

γ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0 \end{cases}$ ή

δ) $f(x)=\begin{cases} -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \end{cases}$

**Γ3**. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

$f''(x)=2e^{x^2}+2xe^{x^2}\cdot 2x-2=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2\cdot e^{x^2}$

Προκύπτει ότι $f''(0)=0$, ενώ επειδή στο ερώτημα Γ1, αποδείχθηκε ότι

$e^{x^2}-1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Είναι $f''(x)>0\Rightarrow\left(f''(x)\right)'>0$ *στο* $\mathbb{R}^*$, ενώ

$f''(0)=0$. Άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα *στο* $\mathbb{R}$, άρα f κυρτή.

**Γ4**. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x+3)-f(x),\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $g'(x)=f'(x+3)-f'(x)=3\dfrac{f'(x+3)-f'(x)}{(x+3)-x}=3f''(\xi)$,

όπου $\xi\in(x,\ x+3)$.

Άρα $g'(x) > 0,$ για κάθε $x \in [0,+\infty),$ λόγω του Γ3.

Η $g(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Η δοθείσα εξίσωση τώρα γράφεται $g(|\text{ημ}x|) = g(x)$.

Αφού είναι 1-1, προκύπτει ότι $|\text{ημ}x| = x,\ x \in [0,+\infty) \Leftrightarrow |\text{ημ}x| = |x|,\ x \in [0,+\infty)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνον όταν $x = 0$ (σχολικό βιβλίο σελ. 170).

## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x\,dx=\pi \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot \eta\mu x\,dx+\int_0^{\pi} f''(x)\cdot \eta\mu x\,dx=\pi \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\cdot \eta\mu x\,dx=\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left[\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)\,dx+\left[f'(x)\cdot \eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot \eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$.

Αφού f συνεχής στο $x=0 \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Δηλαδή $f(0)=0$.

Άρα από (1) $\Rightarrow f(\pi)=\pi$.

Έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}$, $x\neq 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}\right)=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$

Δηλαδή $f'(0)=1$.

**Δ2** **α)** Από την σχέση $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ παραγωγίζοντας έχουμε

$e^{f(x)}f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)f'(x)+e^{x}$ (2) ΄

Έστω ότι η $f$ παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε από Θ.

Fermat $f'(x_0)=0$ (3)

Από (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)f'(x_0)+e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0}=1 \Rightarrow x_0=0$.

Επομένως θα είναι $f'(0)=0$, άτοπο διότι $f'(0)=1$.
Άρα η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

**β)** Αφού η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη θα είναι $f'(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Όμως η $f'$ είναι συνεχής αφού η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f'(0)=1>0 \Rightarrow f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η $f$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**Δ3.** Αφού $f$ συνεχής και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το
$f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.
Όμως $f(R)=R \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$
Έχουμε $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| = \dfrac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \dfrac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \dfrac{2}{|f(x)|}$
και αφού $f$ αύξουσα, για $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0.$
Έτσι $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \leq \dfrac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\dfrac{2}{f(x)} \leq \dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \dfrac{2}{f(x)}$.
Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{f(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{f(x)}=0$.
Άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

**Δ4** Θέτω $\ln x=u \Rightarrow \dfrac{1}{x}\cdot dx=du$

Για $x=1 \Rightarrow u_1=\ln 1=0$

Για $x=e^{\pi} \Rightarrow u_2=\ln e^{\pi}=\pi$

Έτσι $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi} f(u)du$

Αρκεί να δείξουμε ότι $0<\displaystyle\int_0^{\pi} f(u)du<\pi^2$ (1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi] \Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(\pi)$

(η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\pi$ και για $x=0$)

$\Rightarrow f(x)\leq\pi \Rightarrow \pi-f(x)\geq 0$, $x\in[0,\pi]\Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-f(x))dx>0$ (γιατί η $\pi-f(x)$ δεν μηδενίζεται παντού στο $[0,\pi]$)$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \pi\, dx - \int_0^{\pi} f(x)\, dx > 0 \Rightarrow \pi^2 > \int_0^{\pi} f(x)\, dx \qquad (2)$$

Ομοίως $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\, dx > 0 \qquad (3)$

Από (2), (3) $\Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x)\, dx < \pi^2$ δηλαδή ισχύει η (1).

**ΥΠΕΥΘΥΝΟΙ ΘΕΜΑΤΩΝ**
**ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ Ι.**
**ΠΕΦΑΝΗΣ Π.**
**ΑΠΟΣΚΙΤΗΣ Θ.**
**ΓΚΟΛΦΙΝΟΠΟΥΛΟΥ Α.**