ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, όταν το ν είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

(Μον. 2)

β) $\left(\sqrt{3}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

(Μον. 2)

γ) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων.

(Μον. 2)

δ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1, ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\,g(x)\right) = \ell_1 \ell_2 .$$

(Μον. 2)

ε) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	**Αριθμός υπαλλήλων** ν_i	**Αθροιστική Συχνότητα** N_i	**Σχετική Συχνότητα** $f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
ΣΥΝΟΛΑ				

Β1. Αν γνωρίζετε ότι η 5^{η} συχνότητα (ν_5) ισούται με την 1^{η} συχνότητα (ν_1), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

<u>ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ</u>

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 12

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^2+\alpha x-3,\ \alpha\in\mathbb{R}\ .$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν

$$\alpha=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$$

Μονάδες 8

Δ2. Για α=2 να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 3

Δ3. Για α=2 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(-2,f(-2)\right)$.

Μονάδες 8

Δ4. Αν τα σημεία $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), A_3(x_3,y_3), A_4(x_4,y_4), A_5(x_5,y_5)$ ανήκουν στην ευθεία ε: $y=-2x-7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν μέση τιμή $\bar{x}=2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 28

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 87

Α3. α → Σωστό
β → Λάθος
γ → Σωστό
δ → Σωστό
ε → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	**Αριθμός υπαλλήλων ν_i**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i %**	**$x_i \nu_i$**
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
ΣΥΝΟΛΑ	20		100	Σ= 40

Έχουμε $\nu_5=\nu_1=5, \mathrm{N}_2=\nu_1+\nu_2$ άρα

$\nu_2=4, \mathrm{f}_3\%=10 \Leftrightarrow \frac{\nu_3}{\nu}\cdot 100=10 \Leftrightarrow \frac{\nu_3}{20}\cdot 100=10 \Leftrightarrow$

$5\cdot \nu_3=10 \Leftrightarrow \nu_3=2, οπότε\ \ \nu_4=4$

• $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100=\frac{\nu_i}{20}\cdot 100=5\cdot \nu_\iota, i=1,2,...,5$

Άρα $f_1\%=5\nu_1=25,\ f_2\%=5\nu_2=20,\ f_4\%=20$ όποτε $f_5\%=25$.

Β2. Έχουμε $\bar{x}=\frac{\sum x_i \nu_i}{\nu}=\frac{40}{20}=2$

Β3. Ο αριθμός των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες είναι $N_4=15$

Β4.	Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες είναι $P = f_3\% + f_4\% + f_5\% = 55$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.	Έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}\right)' = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' + \left(\dfrac{1}{2}\right)' = \dfrac{(x)'\cdot(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$ $= \dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ Επομένως $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$
Γ2.	Έχουμε $f'(-1) = \dfrac{1-(-1)^2}{\left[(-1)^2+1\right]^2} = \dfrac{0}{4} = 0$ και $f(1) = \dfrac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \dfrac{0}{4} = 0$
Γ3.	Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$ •Ε*πειδή* $(x^2+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του $1-x^2$. <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>- 0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td>↗</td></tr><tr><td></td><td></td><td>τ.μ.</td><td>τ.ε.</td><td></td></tr></table>• Από τον πίνακα φαίνεται ότι f ↗ $(-\infty,-1]$ f ↘ $[-1,1]$ και f ↗ $[1,+\infty)$ •Η f παρουσιάζει στο $x_1 = -1$ τοπικό μέγιστο το $f(-1) = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$ και στο $x_2 = 1$ τοπικο ελάχιστο το $f(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$
Γ4.	Επειδή $2015, 2016 \in [1,+\infty)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε $2015 < 2016 \Leftrightarrow f(2015) < f(2016)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έχουμε $a=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(x-2\right)\cdot\left(x-4\right)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\left(x-2\right)=2$

Δ2.

Για $a=2$ έχουμε $f(x)=x^2+2x-3, x\in\mathbb{R}$ επομένως

$f'(x)=\left(x^2+2x-3\right)'=2x+2$. Άρα $f'(x)=2x+2, x\in\mathbb{R}$

Δ3.

Έστω $\varepsilon:\psi=\lambda x+\beta$ η εφαπτομένη. Είναι $f(-2)=(-2)^2+2\cdot(-2)-3=-3$

Άρα $\mathrm{M}\left(-2,-3\right)$ Έχουμε $\lambda=f'(-2)=-4+2=-2$ και η ε διέρχεται από τα $\mathrm{M}\left(-2,-3\right)$ επομένως $-3=4+\beta\Leftrightarrow\beta=-7$ επομένως $\varepsilon:\Psi=-2x-7$.

Δ4.

Οι τεταγμένες των $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3,\mathrm{A}_4,\mathrm{A}_5$ είναι $\Psi_{i=}-2x_i-7, i=1,2,3,4,5$

Επομένως $\overline{\Psi}=-2\bar{x}-7=-2\cdot 2-7=-11$

Επιμέλεια :

Αποσκίτης Θεόδωρος