

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΠΕΜΠΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_k$  οι τιμές μίας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ , όπου  $k, n$  μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με  $k \leq n$ .

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα  $n_i$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_i$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, k$ ;

**Μονάδες 4**

**A2.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$ , όπου  $x, c \in \mathbb{R}$  και  $c$  σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή  $f'(x) = (c)' = 0$ .

**Μονάδες 6**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών  $(\alpha, \beta)$ .

**β.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

**γ.** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**A4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

**α.**  $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$ , με  $x \neq 0$ .

**β.**  $(x^v)'$  =....., όπου  $v$  φυσικός αριθμός.

**γ.**  $(c \cdot f(x))'$  =....., όπου  $c \in \mathbb{R}$  και  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - ax + 2$ , όπου  $a \in \mathbb{R}$  σταθερά και  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Αν η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του  $a$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Για  $a = 3$ , να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

**Μονάδες 5**

**B3.** Για  $a = 3$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

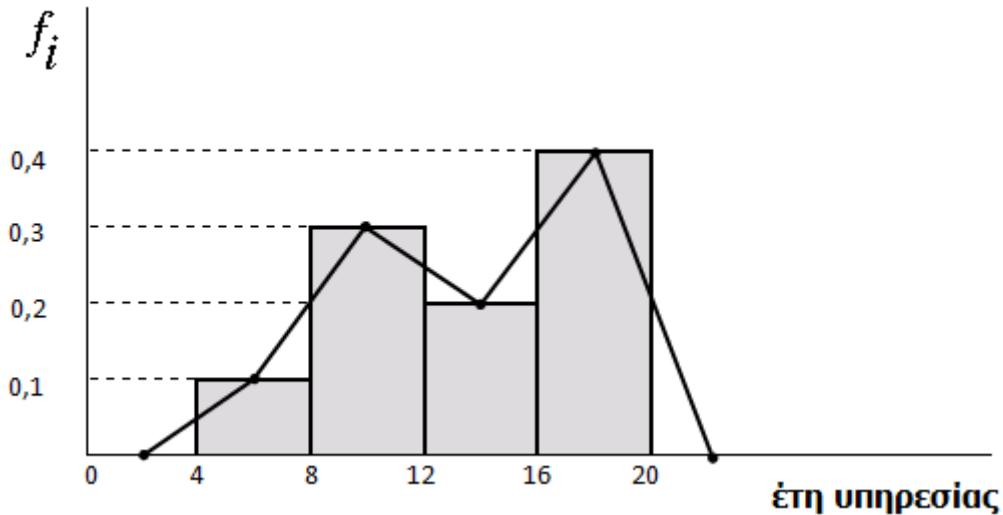
**Μονάδες 7**

**B4.** Για  $a = 3$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(0, f(0))$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων  $f_i$  που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



**Γ1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$	$a_i$
[4,8)		5		$36^\circ$
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		$144^\circ$
Σύνολο		50		$360^\circ$

όπου  $a_i$  το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

**Μονάδες 12**

**Γ2.** Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

**Μονάδες 3**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος  $x$  μέτρα (m), πλάτος  $y$  μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του  $x$ , δίνεται από τον τύπο  $E(x) = -x^2 + 40x$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $E(x)$ .

**Μονάδες 10**

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $E(x)$  ως προς τη μονοτονία της.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη  $x_A = 29,5\text{m}$  και  $x_B = 34,2\text{m}$ , αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

A1) Σχολικό Βιβλίο/σελ.65

A2) Σχολικό Βιβλίο/σελ.28

A3)

1. Λάθος
2. Σωστό
3. Λάθος

A4)

i)  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

ii)  $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$

iii)  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

### ΘΕΜΑ Β

B1.  $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - \alpha \cdot 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$ .

B2. Είναι  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = -1$

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι:  $x \in \mathbf{R} - \{-1, +1\}$

B3.  $\lim = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$

B4. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ως πολυωνυμική συνάρτηση με παράγωγο  $f'(x) = 2x - 3$ .

$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

Έστω η εφαπτομένη  $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$  της  $C_f$  και το σημείο επαφής  $M(0,2)$ .

Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι :  $\lambda = f'(0) = -3$

Επομένως  $\varepsilon: y = -3x + \beta$

Το σημείο επαφής  $M(0,2)$  επαληθεύει την  $\varepsilon$ , άρα έχουμε

$$2 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι  $\varepsilon: y = -3x + 2$

## Θέμα Γ

Γ1.

Έτη υπηρεσίας	Κεντρική τιμή	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	$\alpha_i$
[4,8)	6	5	<b>0,1</b>	<b>36</b>
[8,12)	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>0,3</b>	<b>108</b>
[12,16)	14	<b>10</b>	<b>0,2</b>	<b>72</b>
[16,20)	<b>18</b>	20	<b>0,4</b>	144
Σύνολο		<b>50</b>	<b>1</b>	<b>360</b>

Για την συμπλήρωση του παραπάνω πίνακα χρησιμοποιούνται οι τύποι:

- $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$
- $\alpha_i = f_i \cdot 360$
- $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$

$$\Gamma 2. v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 20 = 45$$

$$\Gamma 3. f_1\% + f_2\% + f_3\% = f_1 \cdot 100\% + f_2 \cdot 100\% + f_3 \cdot 100\% \\ = 10\% + 30\% + 20\% = 60\%$$

Γ4. Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων, δηλαδή είναι  $E = 1$

### ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1) \Pi = 2x + 2y \Leftrightarrow 2x + 2y = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow \\ y = 40 - x, 0 < x < 40 \\ E = x \cdot y \Leftrightarrow E(x) = x(40 - x) \Leftrightarrow E = -x^2 + 40x$$

Πρέπει  $x > 0$  και  $x < 40$

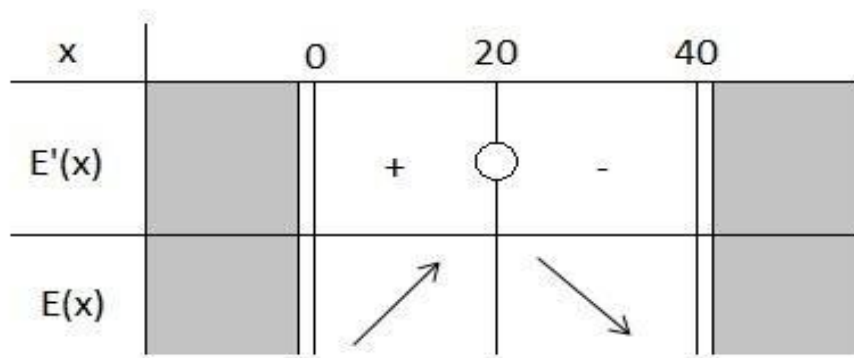
Οπότε το πεδίο ορισμού της  $E(x)$  είναι το  $(0, 40)$

Δ2)

$$E(x) = -x^2 + 40x, 0 < x < 40$$

$$E'(x) = 40 - 2x, 0 < x < 40$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow -2x = -40 \Leftrightarrow x = 20 \text{ (δεκτή)}$$





Η  $E(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0,20]$

Η  $E(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[20,40)$

Δ3) Το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο για  $x=20\text{m}$  και η μέγιστη τιμή του είναι:

$$E(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400\text{m}^2$$

Δ4) Εφόσον το  $x_A < x_B$  και  $x_A, x_B \in [20,40)$  στο οποίο η  $E(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει:

$$x_A < x_B \Leftrightarrow E(x_A) > E(x_B)$$

Συνεπώς το οικόπεδο με το μεγαλύτερο εμβαδόν θα είναι το οικόπεδο Α.

**Επιμέλεια :**  
**Βλαχοκυριάκος Κυριάκος**  
**Πιτσικούλη Ειρήνη**