ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x\in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \text{συν}x, & 0<x\le \dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ell n x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο (1, e).

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = \left(\ell n x_0\right) \cdot (x+1) - \ell n x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \ \ x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f(x)\right)$ και $B\left(x, \varphi(x)\right)$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 135

Α2. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 51

Α3. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 23

Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω όπου $x - 1$ το y και έχω

$y = x - 1$

Επομένως

$f(y) = y \cdot e^{1-y}$

Άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Β2. Η f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων

$f'(x) = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x)$

$f'(x) = 0 \overset{e^{1-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \overset{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	max	↘	

Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

B3. $f''(x) = -e^{1-x}\cdot(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}\cdot(-1+x-1)$

$\Leftrightarrow f''(x) = e^{1-x}\cdot(x-2)$

$f''(x) = 0 \overset{e^{1-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x) = 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			
		Σ.Κ.	

Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$

Η C_f έχει σημείο καμπής το $\left(2, \frac{2}{e}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} \overset{u=1-x}{\underset{u\to+\infty}{=\!=}} \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} \overset{u=1-x}{\underset{u\to-\infty}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \cancel{\lambda}^{0}\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right) \overset{u=1-x}{\underset{u\to-\infty}{=\!=}}$$

$$= \lim_{u\to-\infty}(1-u)\cdot e^{u} = \lim_{u\to-\infty}\frac{1-u}{e^{-u}} =$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\Delta\text{LH}}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{(1-u)'}{\left(e^{-u}\right)'} = \lim_{u\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-u}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία ε: $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.

i) Αφού f συνεχής

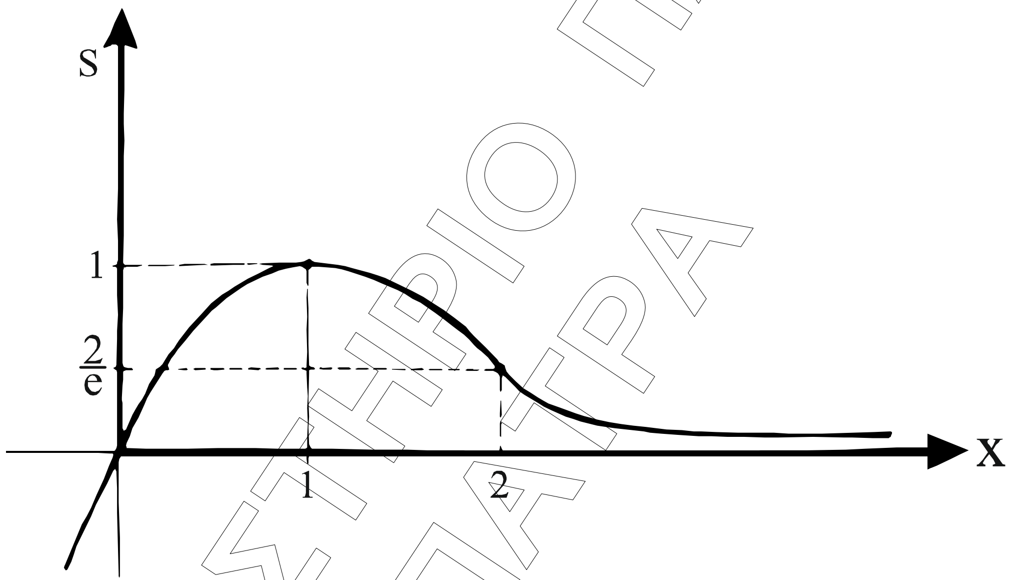
$$f\left((-\infty,1]\right) \overset{f \text{ γνησιώς αύξουσα}}{=} (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] = (-\infty,1]$$

γιατί: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x\bullet e^{1-x}) \underset{u->+\infty}{\overset{u=1-x}{=}}$

$= \lim_{u\to+\infty}(1-u)e^{u} = (-\infty)\bullet(+\infty) = -\infty$

$$f([1,+\infty)) \overset{f \text{ γνησιώς φθίνουσα}}{=} (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] = (0,1]$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1]$



ii)

- Αν $\lambda \le 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \notin (0, 1]$.
- Αν $0 < \lambda < 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες γιατί $\lambda \in (-\infty, 1]$ και $\lambda \in (0, 1]$.
- Αν λ = 1, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα το $x = 1$ γιατί για $x < 1 \overset{f \text{ αύξ.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) = 1$ και για $x > 1 \overset{f \text{ φθίν.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) = 1$.
- Αν $\lambda > 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική.

Η f συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ έχει ελάχιστο στο π ως τριγωνομετρική $f(\pi) = -1$

Στο $x_0 = 0$ έχω

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \text{συν}x = 1$

$f(0) = 1$

Άρα f συνεχής και στο $x_0 = 0$

Τελικά f συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(\alpha x^2 - 3x - 1)}{\cancel{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει, δηλ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2 **i)**

· η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ από Γ1

· η f παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = (\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

· $f(0) = 1$

· $f(\frac{3\pi}{2}) = \text{συν}\frac{3\pi}{2} = 0$

· $f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$

Άρα δεν ισχύει το Θεώρημα Rolle

ii)

$\forall x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ έχω $f'(x) = -\text{ημ}x$

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\text{ημ}\xi = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}\xi = 0 \Leftrightarrow$

$\text{ημ}\xi = \text{ημ}0 \Leftrightarrow \xi = 2\kappa\pi$ ή $\xi = 2\kappa\pi + \pi$

$\Leftrightarrow \xi = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$$0<\xi<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$0<\kappa\pi<\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0<\kappa<\frac{3}{2}$$

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\kappa = 1$

Άρα $\xi = \pi$

Γ3. Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,0)$

$f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$

$\Delta=36+12a$

Έχω $a<-3 \Rightarrow 12a<-36 \Leftrightarrow 36+12a<-36+36 \Leftrightarrow \Delta<0$

Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη

Γ4. Έχω $f'(x)<0 \quad \forall x\in(-\infty,0)$

Αφού $f'(x)$ έχει Δ<0

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

$f'(x)=-\eta\mu x<0 \quad \forall x\in(0,\pi)$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$

Αφού f συνεχής στο 0 έχω f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$

$f'(x)=-\eta\mu x>0 \quad \forall x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

x	$-\infty$	0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	↘		↘	ο.ε. $\boxed{-1}$	↗	

Η f έχει ελάχιστο στο π το $f(\pi)=-1$, άρα $f(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$

Θεωρώ $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

·η $K(x)$ συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών

·$K(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1 < 0$

·$K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$

$\Rightarrow K(1) \cdot K(e) < 0$

Από Θ. Bolzano $\exists\ x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$

$K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in (0, +\infty)$

$K(x) \nearrow$ στο $(0, +\infty)$

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Δ2. $f(x) = (\ln x)(x + 1) - \ln x - 1$

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$

έχει προφανή ρίζα από Δ_1 το x_0

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0\ \ \forall\ x > 0 \Rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$

Για $0 < x < x_0 \overset{f' \text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, x_0\right]$

Για $x > x_0 \overset{f' \text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\left[x_0, +\infty\right)$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	ο.ε. $\boxed{0}$	$\nearrow$	

Άρα έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 με

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \left(x_0 + 1\right) - \ln x_0 - 1 \overset{\text{από } \Delta 1}{=} \frac{x_0 + 1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3 $g(x)=x\cdot e^{-x} \quad ,x\in\mathbb{R}$

$h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad x\in\mathbb{R}$

Για $x<0$, $g(x)<0$ και $h(x)>0$. Άρα η $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη.

Για $x=0$, $g(0)=0$ και $h(0)=1$. Άρα $g(x)\neq h(x)$.

Για $x>0$:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \ln(x\cdot e^{-x})=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-\ln e)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x-x=\ln x_0\cdot(x+1)-x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0(x+1)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$$

Από Δ έχω μοναδική ρίζα x_0.
Άρα έχω μοναδικό κοινό σημείο.

$$g'(x)=(x)'e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=e^{-x}-x\cdot e^{-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x_0)=e^{-x_0}-x_0\cdot e^{-x_0}=e^{-x_0}(1-x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot(x+1)'=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1)=$$

$$=\frac{x_0^{\,x_0+1}}{e^{x_0+1}}\cdot(\ln x_0-1)$$

Αφού οι δύο εφαπτόμενες των συναρτήσεων διέρχονται από το κοινό τους σημείο, πρέπει και αρκεί $g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0^{\,x_0+1}}{e^{x_0+1}}\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0^{\,x_0+1}}{e\cdot e^{x_0}}\cdot(\ln x_0-1)\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow} e(1-x_0)=x_0^{\,x_0}\cdot x_0\left(\frac{1}{x_0}-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(1-x_0)=x_0^{\,x_0}\cdot x_0\frac{1-x_0}{x_0}\Leftrightarrow e(1-x_0)=x_0^{\,x_0}\cdot(1-x_0)\overset{(1-x_0)\neq 0,\text{άφου } x_0\in(1,e)}{\Leftrightarrow} e=x_0^{\,x_0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln e = \ln x_0^{x_0} \Leftrightarrow 1 = x_0 \cdot \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

που ισχύει από Δ1

Δ4.

$A\big(x, f(x)\big), \quad B\big(x, \varphi(x)\big)$

$$\big(AB\big) = \sqrt{\big(x_B - x_A\big)^2 + \big(y_B - y_A\big)^2} = \sqrt{\big(x-x\big)^2 + \big(\varphi(x) - f(x)\big)^2} =$$

$$= \sqrt{\big(\varphi(x) - f(x)\big)^2} = \big|\varphi(x) - f(x)\big| \overset{f(x)>\varphi(x)}{=} f(x) - \varphi(x)$$

Θεωρώ $h(x) = f(x) - \varphi(x)$

Έστω ότι η φ (x) δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Έστω ότι η φ (x) είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αφού έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 στο οποίο η h είναι παρ/μη από θεώρημα Fermat $h'(x_0) = 0$.

Έχω $h'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$ οπότε $h'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0)$

Από Δ2 η f έχει ελάχιστο στο x_0 με $f'(x_0)=0$

Άρα $\varphi'(x_0) = 0$ δηλαδή το x_0. είναι κρίσιμο σημείο της φ.