

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)  
18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020  
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;

**Μονάδες 4**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = |x|$  έχει παράγωγο στο σημείο  $x_0 = 0$ .

**β.** Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

**γ.** Η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$  δίνεται από τον τύπο  $f_i = \frac{v_i}{n}$ , όπου  $v_i$  η συχνότητα της τιμής  $x_i$  και  $n$  το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 6**

**A3.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

**α.**  $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

**β.**  $(\sqrt{x})' = \dots$ , με  $x > 0$

**γ.**  $(\sin x)' = \dots$

**Μονάδες 9**

**A4.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x^2$  είναι  $f'(x) = (x^2)' = 2x$ , για κάθε  $x$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών.

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$
0				
1				70
2	10			90
3		10		100
<b>Σύνολο</b>		100		

Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο.

**B1.** Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

**Μονάδες 12**

**B2.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;

**Μονάδες 3**

**B3.** Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

**Μονάδες 5**

**B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  σταθερά.

**Γ1.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-1, -2)$ .

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Για  $\lambda = 3$  να βρείτε τις συναρτήσεις  $f'(x)$  και  $f''(x)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Για  $\lambda = 3$  να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Για  $\lambda = 3$  να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)}$$

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$$

Δ1. Να δείξετε ότι

$$f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2)$$

**Μονάδες 5**

Δ2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

**Μονάδες 4**

Δ3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , έχει εξίσωση  $y = 1$ .

**Μονάδες 8**

Δ4. Θεωρούμε σημείο  $A(x, 1)$  της ευθείας  $y = 1$  με  $x > 0$ . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων  $A(x, 1)$  και  $O(0, 0)$  ως προς  $x$ , όταν  $x = 1$ .

**Μονάδες 8**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)  
18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1) Γενικά μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής, αν για κάθε

$$x_0 \in A \text{ ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

A2) α) Λάθος

Η συνάρτηση  $f$  γράφεται  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

• όταν  $h < 0$ , έχουμε  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$ , ενώ

• όταν  $h > 0$ , έχουμε  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

β) Σωστό

γ) Λάθος

Ο τύπος της σχετικής συχνότητας είναι  $f_i = \frac{v_i}{v}$ , όπου  $v_i$  η συχνότητα της τιμής  $x_i$  και  $v$  το μέγεθος του δείγματος.

A3) α)  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

β)  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  με  $x > 0$

γ)  $(\sin x)' = \cos x$

A4) Για τη συνάρτηση  $f(x) = x^2$  έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0)^2 + 2x_0h + h^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0)^2 + 2x_0h + h^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2x_0 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0\end{aligned}$$

για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$

Άρα  $f'(x) = (x^2)' = 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

### ΘΕΜΑ Β

B1) Αφού το 40% των μαθητών δεν διάβασε κανένα βιβλίο συμπεραίνουμε ότι

$$f_1\% = 40.$$

Έτσι

$$F_1\% = f_1\% = 40.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}F_2\% = 70 &\Leftrightarrow F_1\% + f_2\% = 70 \Leftrightarrow 40 + f_2\% = 70 \\ &\Leftrightarrow f_2\% = 70 - 40 \Leftrightarrow f_2\% = 30.\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}F_3\% = 90 &\Leftrightarrow F_2\% + f_3\% = 90 \Leftrightarrow 70 + f_3\% = 90 \\ &\Leftrightarrow f_3\% = 20\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν

$$\begin{aligned}f_3 = 0,2 &\Leftrightarrow \frac{v_3}{v} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{10}{v} = 0,2 \Leftrightarrow 10 = 0,2v \\ &\Leftrightarrow \frac{10}{0,2} = v \Leftrightarrow v = \frac{10 \cdot 10}{0,2 \cdot 10} \Leftrightarrow v = \frac{100}{2} \Leftrightarrow v = 50.\end{aligned}$$

Θα συμπληρώσουμε τη στήλη των συχνοτήτων

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 50 \cdot 0,4 \Leftrightarrow v_1 = 20.$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{v_2}{50} \Leftrightarrow v_2 = 50 \cdot 0,3 \Leftrightarrow v_2 = 15.$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 50 \cdot 0,1 \Leftrightarrow v_4 = 5.$$

Για τη στήλη των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων έχουμε

$$N_1 = v_1 = 20$$

$$N_2 = N_1 + v_2 = 20 + 15 = 35.$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 35 + 10 = 45.$$

$$N_4 = v = 50.$$

Τελικά ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

$x_i$	$v_i$	$f_i \%$	$N_i$	$F_i \%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

B2) Το ποσοστό των μαθητών που έχει διαβάσει τρία βιβλία αντιστοιχεί στην σχετική συχνότητα

$$f_4 = 0,1 = 10\%.$$

B3) Το πλήθος των μαθητών που διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο είναι όσοι μαθητές διάβασαν 1 βιβλίο, 2 βιβλία, 3 βιβλία δηλαδή είναι

$$k = v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 5 = 30 \text{ μαθητές.}$$

B4) Οι μαθητές που διάβασαν το πολύ 2 βιβλία είναι όσοι μαθητές διάβασαν 2 βιβλία, 1 βιβλίο, 0 βιβλία και το αντίστοιχο ποσοστό είναι

$$p = f_1 + f_2 + f_3 = 0,4 + 0,3 + 0,2 = 0,9 = 90\% \text{ των μαθητών.}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1) Αφού η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(-1, -2)$  οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$f(-1) = -2 \quad (1).$$

Όμως

$$f(-1) = (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -1 - \lambda + 2 = 1 - \lambda$$

Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει

$$1 - \lambda = -2 \Leftrightarrow -\lambda = -2 - 1 \Leftrightarrow -\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Γ2) Για  $\lambda = 3$  ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Οπότε η πρώτη παράγωγος συνάρτηση της  $f$  είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 3x^2 + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' + (2)' \\ &= 3x^2 - 3(x^2)' + 0 = 3x^2 - 3(2x) = 3x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση της  $f$  θα προκύψει παραγωγίζοντας την πρώτη παράγωγο της  $f$  που βρήκαμε ακριβώς παραπάνω.

Έτσι λοιπόν είναι

$$\begin{aligned} f''(x) &= (3x^2 - 6x)' = (3x^2)' - (6x)' = 3(x^2)' - 6(x)' \\ &= 3(2x) - 6 \cdot 1 = 6x - 6, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Γ3) Αρχικά θα βρούμε τις ρίζες της παραγώγου συνάρτησης της  $f$ .

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2. \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f$	<	>	<	

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι

- Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_1 = (-\infty, 0]$  και στο διάστημα  $\Delta_3 = [2, +\infty)$ .
- Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_2 = [0, 2]$ .
- Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 = 0$  με τιμή  $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$
- Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_2 = 2$  με τιμή  $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$ .

Γ4) Για το ζητούμενο όριο έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{6(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \overset{0}{0}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

#### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20} \quad \text{έχουμε}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ (x^2 + 4x + 5)^{20} \right]' = 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x^2 + 4x + 5)' = \\ &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4) \\ &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2(x + 2) \\ &= 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2), \quad \text{για κάθε} \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

- Δ2. Το ζητούμενο όριο παρατηρούμε ότι είναι η τιμή της παραγώγου συνάρτησης της  $f$  για  $x = -2$ . Δηλαδή

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= f'(-2) \\ &= f'(-2) = 40 \left( (-2)^2 + 4(-2) + 5 \right)^{19} \cdot (-2+2) \\ &= 40 \left( (-2)^2 + 4(-2) + 5 \right)^{19} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

- Δ3. Έστω  $M(x_0, f(x_0))$  το σημείο όπου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  οπότε

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = 0$$

Δηλαδή

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 40 \left( x_0^2 + 4x_0 + 5 \right)^{19} \cdot (x_0 + 2) = 0$$

- $x_0^2 + 4x_0 + 5 = 0$  που είναι αδύνατη αφού η διακρίνουσα

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$$

- $x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$

$$\text{με } f(-2) = \left( (-2)^2 + 4(-2) + 5 \right)^{20} = (4 - 8 + 5)^{20} = 1^{20} = 1$$

Οπότε το σημείο  $M$  είναι το

$$M(-2, f(-2)) = (-2, 1)$$

Επομένως

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(-2) = 0$$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

$$y = f'(-2)x + \beta \Leftrightarrow y = 0 \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = \beta$$

Επειδή το σημείο  $M$  είναι σημείο της εφαπτόμενης η εξίσωση θα είναι

$$y = 1$$

Δ4. Έστω  $A(x,1)$  το σημείο της ευθείας  $y = 1$  με  $x > 0$ .

Η απόσταση των σημείων  $A$  και  $O$  δίνεται από

$$\begin{aligned}(OA) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Έστω  $(OA) = d(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  με  $x > 0$

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος έχουμε

$$\begin{aligned}d'(x) &= \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων  $A$  και  $O$  όταν  $x=1$  είναι

$$d'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$